Algorytmy i Struktury Danych

10a: Wprowadzenie do grafów

©Marcin Sydow

Spis zagadnień

- zastosowania grafów
- definicja grafu (i skierowanego), prostego, multigrafu
- drogi i cykle, spójność w tym słaba i silna
- drzewo i las: definicja, charakteryzacje, własności
- drzewa ukorzenione
- drzewa binarne
- reprezentacja grafów: listy i macierze sąsiedztwa i incydencji

Graf (matematyczna definicja grafu)

Graf (nieskierowany) to uporządkowana para zbiorów: $G = (V, E)$, gdzie:

- V to zbiór *wierzchołków* grafu
- E to zbiór *krawędzi* grafu G.
- każda krawędź $e = \{v, w\}$ ze zbioru E to *nieuporządkowana* para wierzchołków ze zbioru V, zwanych *końcami* krawędzi e.

Dla krawędzi $e = \{v, w\} \in E$ mówimy też:

- krawędź e *łączy* wierzchołki v i w
- wierzchołki v i w są *sąsiednie* w grafie
- krawędź e jest *incydentna* z wierzchołkiem v i w.

Graf nieskierowany naturalnie reprezentuje *symetryczną* relację binarną na zbiorze wierzchołków (przykład).

* Graf, w którym zbiory V i E są puste nazywamy **zerowym**

Graf skierowany (digraf) (matematyczna definicja)

Graf skierowany to uporządkowana para zbiorów: $G = (V, E)$, gdzie:

- V to zbiór *wierzchołków* grafu
- E to zbiór (skierowanych) *krawędzi* grafu G.
- każda (skierowana) krawędź $e = (v, w)$ ze zbioru E to *uporządkowana* para wierzchołków ze zbioru V, zwanych *początkiem* i *końcem* krawędzi e

Dla krawędzi $e = (v, w) \in E$ mówimy też, że krawędź e *biegnie* od v do w.(lub, że krawędź *wychodzi* z v i *wchodzi* do w)

Krawędzie skierowane nazywamy też *łukami*.

Graf skierowany reprezentuje dowolną relację binarną na zbiorze wierzchołków.

Rysunek grafu

Graf można narysować na płaszczyźnie[1] na nieskończenie wiele (równoznacznych) sposobów. Rysunek jest tylko sposobem graficznej reprezentacji grafu.

Należy odróżniać graf jako obiekt abstrakcyjny od jego rysunków.

[1] lub innej powierzchni (np. torusie, etc.)

Graf prosty i stopień wierzchołka

graf prosty: nie ma *pętli* ani *krawędzi wielokrotnych* (pętla to krawędź postaci (v, v), uwaga: dla grafu skierowanego krawędzie (v, w) i (w, v) są różne, a więc mogą występować obie na raz (nie jest to krawędź wielokrotna))

stopień wierzchołka, $deg(v)$, liczba krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem.

(uwaga: W grafach nieprostych przyjmujemy, że każda pętla (v, v) wnosi 2 do stopnia wierzchołka)

wierzchołek o stopniu 0 nazywamy **izolowanym**

Drogi(ścieżki)

droga(ścieżka): naprzemienny ciąg wierzchołków i krawędzi $(v_0, e_0, v_1, e_q, \ldots, v_k, e_k, \ldots, v_l)$ taki, że krawędź e_k zawsze łączy wierzchołki v_k, v_{k+1}.

(uwaga: czasami utożsamiamy drogę po prostu z jej podciągiem wierzchołków a czasami z jej podciągiem krawędzi, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień)

Analogicznie definiujemy **drogę skierowaną** w grafie skierowanym.

Uwaga: w różnych podręcznikach istnieją różne konwencje nazewnicze (np. drogi/ścieżki proste, elementarne, trasy, marszruty, etc.).

Drogi(ścieżki) c.d.

droga(ścieżka) prosta: nie powtarzają się krawędzie

droga(ścieżka) elementarna: nie powtarzają się wierzchołki

długość drogi: liczba jej krawędzi

(przyjmiemy, że: droga o długości 0: pojedynczy wierzchołek)

Cykle

cykl: droga/ścieżka o długości conajmniej 3, taka, że $v_0 == v_l$ (początek i koniec są tożsame) (droga/ścieżka zamknięta)

analogicznie: **cykl elementarny** (za wyjątkiem początkowego i końcowego) i **cykl prosty**

Obwód grafu: długość najkrótszego cyklu elementarnego w grafie

Spójność

graf jest **spójny** $\Leftrightarrow$ każde jego dwa różne wierzchołki są połączone drogą

przypomnienie (równoważna definicja): graf (niepusty) jest spójny $\Leftrightarrow$ nie jest sumą dwóch niepustych grafów

składowa spójna: maksymalny podgraf grafu, który jest spójny

liczbę składowych spójnych grafu G oznaczamy przez $c(G)$

Silna spójność

(dla grafów skierowanych)

Graf skierowany jest **silnie spójny** $\Leftrightarrow$ dla każdej uporządkowanej pary różnych wierzchołków istnieje droga skierowana z pierwszego do drugiego

uwaga: silna spójność implikuje słabą spójność (nie odwrotnie)

składowa silnie spójna: maksymalny podgraf silnie spójny

składowa słabo spójna: maksymalny podgraf spójny

Drzewa

drzewo to graf spójny i bez cykli (acykliczny)

las to graf bez cykli (niekoniecznie spójny)

liść to taki wierzchołek drzewa, który ma stopień 1
pozostałe wierzchołki nazywamy **wewnętrznymi**

uwaga: wierzchołki w drzewach często nazywane są też **węzłami** drzewa

Charakteryzacja drzew

Następujące warunki są równoważne :

- graf T jest drzewem o n wierzchołkach
- T ma n-1 krawędzi i jest acykliczny
- T jest spójny i ma n-1 krawędzi
- każde dwa wierzchołki T sa połączone dokładnie jedną drogą elementarną
- T jest acykliczny, ale po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi powstaje dokładnie jeden nowy cykl

Drzewo ukorzenione *

Drzewo ukorzenione to drzewo z pewnym wyróżnionym wierzchołkiem nazywanym **korzeniem** drzewa.

głębokość (albo **poziom**) $depth(v)$ wierzchołka w drzewie ukorzenionym to jego odległość od korzenia.

Wyodrębnienie korzenia wprowadza w drzewie naturalną hierarchię w zbiorze wszystkich wierzchołków: poziom wierzchołka wyznacza jego miejsce w hierarchii

rysunek drzewa ukorzenionego: korzeń umieszczany jest na górze a kolejne wierzchołki kolejno poziomami poniżej, każdy poziom na tej samej wysokości

Drzewa ukorzenione, c.d. *

wysokość drzewa ukorzenionego: maksymalna głębokość

przodkiem wierzchołka v nazywamy wierzchołek w leżący na drodze od korzenia do v, v nazywamy wtedy **potomkiem** wierzchołka w (korzeń nie ma przodków a liście nie mają potomków)

przodek w wierzchołka v sąsiadujący z v nazywamy **rodzicem** (ojcem) wierzchołka v, wtedy v nazywamy **dzieckiem** (synem) wierzchołka w

wierzchołek u mający tego samego rodzica co v nazywamy **bliźniakiem** (albo bratem) dla v

liście w drzewie ukorzenionym: wierzchołki bez dzieci

poddrzewo wierzchołka v drzewa ukorzenionego T to podgraf T będący drzewem ukorzenionym, którego korzeniem jest v (jest tyle poddrzew v ile dzieci ma v)

Reprezentacje komputerowe drzewa ukorzenionego *

Najprostsza reprezentacja n-wierzchołkowego, etykietowanego drzewa ukorzenionego w programie komputerowym to tzw. **tablica rodziców**: i-ta pozycja n-elementowej tablicy $n[i]$ zawiera etykietę rodzica wierzchołka o etykiecie i (za wyjątkiem korzenia).

Stosuje się też stuktury dowiązaniowe o różnych gęstościach powiązań (od pojedynczych, przez podwójne, do wielokrotnych, zależnie od zastosowań)

Drzewa $d-$arne (gdzie $d \in N^+$) *

drzewo $d-$arne: drzewo ukorzenione, gdzie każdy wierzchołek ma conajwyżej d dzieci, dla pewnej ustalonej liczby $d \in N^+$

uwaga: za d podstawiamy liczbę, np. "drzewo 3-arne"

zupełne drzewo $d-$arne: drzewo $d-$arne o możliwie dużej liczbie wierzchołków, i wszystkie liście różnią się głębokością conajwyżej o 1

drzewo $d-$arne ma co najwyżej d^l wierzchołków na poziomie l.

drzewo $d-$arne o wysokości h zawiera n wierzchołków, gdzie zachodzi: $h+1 \leq n \leq \frac{d^{h+1}-1}{d-1}$

(ograniczenie górne to suma ciągu geometrycznego)

Drzewo uporządkowane *

drzewo uporządkowane to drzewo d-arne, gdzie dla każdego wierzchołka wszystkie dzieci mają przypisany pewien porządek liniowy.

Uwaga: Na **rysunku drzewa uporządkowanego** dzieci rysuje się zgodnie z ich porządkiem od lewej do prawej

porządek standardowy drzewa uporządkowanego to uporządkowanie liniowe wszystkich jego wierzchołków rekurencyjnie leksykograficznie po poziomach a następnie zgodnie z porządkiem dzieci

Uwaga: porządek standardowy odpowiada naturalnemu przeglądaniu rysunku drzewa ukorzenionego od góry do dołu i od lewej do prawej

Drzewa binarne *

drzewo binarne: 2-arne drzewo uporządkowane, w którym dodatkowo jest określone, które dziecko jest lewe, a które prawe (nie mogą być oba lewe ani oba prawe)

Obserwacja: pojęcia drzewa, drzewa ukorzenionego, drzewa d-arnego, uporządkowanego, binarnego stanowią hierarchię coraz bardziej specjalizujących się pojęć.

Obserwacja 2: należy odróżniać różne rodzaje izomorfizmów właściwych dla powyższych pojęć (np. dwa drzewa mogą być izomorficzne jako ukorzenione, ale nie jako binarne)

Reprezentacje grafów *

Oprócz definicji matematycznej, stosuje się rozmaite *reprezentacje grafów*, szczególnie użyteczne w programach komputerowych.

- macierz sąsiedztwa
- macierz incydencji
- listy sąsiedztwa
- lista krawędzi
- reprezentacja obiektowa (różne rodzaje)

Uwaga: w przypadku dodatkowych etykiet lub wag krawędzi lub wierzchołków, powyższe reprezentacje są odpowiednio rozszerzane

Macierz sąsiedztwa *

Dla grafu $G = (V, E)$, o n wierzchołkach **macierz sąsiedztwa** grafu G: kwadratowa macierz A o n wierszach i kolumnach, taka, że $A[i, j] = 1 \Leftrightarrow$ wierzcho łki i, j są połączone krawędzią, $A[i, j] = 0$ w przeciwnym przypadku.
(w przypadku pętli (i, i), wstawiamy wartość 2 w pozycji $A[i, i]$)

Obserwacje:

- dla grafów nieskierowanych macierz jest symetryczna ($A^T = A$)
- dla grafów prostych przekątna zawiera zera
- suma w wierszu: stopień (wyjściowy, dla skierowanych)
- suma w kolumnie: stopień (wejściowy, dla skierowanych)
- dla grafów skierowanych A^T odpowiada “odwróceniu” kierunków krawędzi

Macierz incydencji *

Macierz I, gdzie wiersze odpowiadają wierzchołkom a kolumny krawędziom. $I[v, e]$ zawiera 1 $\Leftrightarrow$ v jest incydentny z e. W przeciwnym razie zawiera 0.

Dla grafów skierowanych: 1 dla wchodzących, -1 dla wychodzących

Macierze sąsiedztwa i macierze incydencji mają wiele interesujących własności algebraicznych odnoszących się do reprezentowanych grafów (m.in. tym zajmuje się tzw. *algebraiczna teoria grafów*)

Listy sąsiedztwa *

Reprezentacja ta składa się z list odpowiadających poszczególnym wierzchołkom. Każda lista rozpoczyna się od etykiety wierzchołka, po której następuje lista wierzchołków sąsiednich (dla grafów skierowanych: lista wierzchołków, do których wchodzą krawędzie wychodzące z bieżącego wierzchołka).

Koszt pamięciowy reprezentacji *

Reprezentacje różnią się istotnie m.in. ilością zużytej pamięci komputera oraz złożonością czasową niektórych wykonywanych na nich operacji.

Przez **rozmiar grafu** rozumie się parę (n, m), gdzie n to liczba wierzchołków a m to liczba krawędzi grafu.

Graf nazywamy **rzadkim** jeśli jego liczba krawędzi jest "mała" czyli jest liniową funkcją n (bardziej formalnie: $m = O(n)$, dla ustalonego ciągu grafów)

Proste własności reprezentacji *

- macierz sąsiedztwa ma zawsze rozmiar $\Theta(n^2)$, niezależnie od liczby krawędzi grafu (ma zawsze kwadratowy koszt pamięciowy)
- lista sąsiedztwa ma rozmiar $\Theta(n + m)$, czyli dostosowuje się do liczby krawędzi (dla grafów rzadkich ma tylko koszt liniowy)
- macierz incydencji ma zawsze rozmiar $\Theta(n \cdot m)$
- pewne operacje są szybsze na macierzy niż na listach sąsiedztwa (które)

Inne reprezentacje *

- lista krawędzi (bardzo prosta, czytelna dla ludzi, nadaje się do formatu tekstowego (każda krawędź w oddzielnej linii, nadaje się do grafów dynamicznie zwiększających się)
- obiektowa (wysokopoziomowa): każdy wierzchołek i każda krawędź to obiekt; wierzchołki mogą mieć dowiązania do swoich sąsiadów i krawędzi incydentnych, analogicznie krawędzie
- "gd0" (niskopoziomowy format binarny): połączona lista ciągów identyfikatorów całkowitoliczbowych, gdzie każdy ciąg jest postaci: $id_i, deg_i, n_{i,1} \ldots n_{i,deg_i}$ (identyfikator wierzchołka, jego stopień (wyjściowy), ciąg indentyfikatorów jego sąsiadów)

Przykładowe pytania/zadania

- podaj definicje: grafy (skierowane i nieskierowane), drogi i cykle
- definicje i wyznaczanie: spójność, silna/słaba spójność, składowe (silnie/słabo) spójne
- podaj definicje dotyczące różnych rodzajów drzew, lasów i ich elementów oraz własności
- omów reprezentacje grafów i porównaj ich złożoności czasowe i pamięciowe

Dziękuję za uwagę